

어나고 있다.

블랙 홀

늙은 별은 질량이 $1.4 M_{\text{sun}}$ 이하이면 백색왜성이 되고, 1.4 와 $\sim 3 M_{\text{sun}}$ 사이에 있으면 중성자별이 된다. 더 무거운 늙은 별은 무엇이 될까? $M > \sim 3 M_{\text{sun}}$ 일 때는 축퇴된 전자 기체나 축퇴된 중성자 기체 어느 것도 중력 수축에 저항할 수 없다. 그런 별은 결국 공간상의 한 점으로 끝날 것인가? 그렇게 될 것 같지는 않다. 한가지 주장이 불확정성 원리 $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ 로부터 제기된다. 이 원리에 의해 수소원자는 안으로 끄는 양성자의 전기장이 있음에도 어느 크기 이하로는 되지 않는다. 같은 원리 때문에 무거운 늙은 별은 안으로 끄는 중력하에서도 어느 크기 이하로는 수축될 수 없다. 또는 어쩌면 양성자와 중성자를 이루는 (13장) 쿼크(quark)는 별이 어느 밀도에 도달하면 별을 안정시키는 특별한 성질을 갖고 있는지도 모른다.

그 별의 마지막 모습이 어찌되든, $M > 3 M_{\text{sun}}$ 인 늙은 별은 식 (2.30)의 슈바르츠실트 반경을 넘어 계속해서 수축하면서 블랙 홀을 만든다 (2.9절). 우리는 그 별로부터 어떤 정보도 얻어 낼 수 없다. 왜냐하면 그 별의 중력장이 너무 강해서 어떤 것도 광자조차도 빠져 나가지 못하기 때문이다.

연습문제

9.2 맥스웰-볼츠만 통계

- (1) 원자 수소로 된 기체에서 1,000 원자당 1개의 원자가 $n=2$ 인 에너지 준위에 있으려면 온도는 얼마인가?
2. 태양 대기의 온도는 5000K다. 이 지역에서 $n=1, 2, 3$, 그리고 4에 있는 수소원자의 상대적인 비율을 구하라. 각 준위의 다중도를 고려해야 한다.
3. Na의 첫째 틀뜬 상태 $3^2P_{1/2}$ 의 에너지는 바닥상태 $3^2S_{1/2}$ 보다 2.093 eV만큼 높다. 1200K의 나트륨 증기에서 각 상태에 있는 원자 개수 사이의 비를 구하라(예제 7.6).
4. H_2 분자의 진동주파수는 $1.32 \times 10^{14} \text{ Hz}$ 이다. (a) 5000K에서 $\nu=0, 1, 2, 3$, 그리고 4인 진동상태들의 상대적 밀도 구하라. (b) $\nu=2$ 와 $\nu=3$ 인 상태의 밀도는 같을 수 있는가? 만일 같다면, 몇 도에서 이런 일이 일어나는가?
5. H_2 분자의 관성능률은 $4.64 \times 10^{-48} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 이다. (a)

300K에서 $J=0, 1, 2, 3$, 그리고 4인 회전상태 밀도를 구하라. (b) $J=2$ 인 상태와 $J=3$ 인 상태의 밀도가 같을 수 있는가? 만일 같다면, 몇 도에서 이런 일이 일어나는가?

6. 어떤 4준위 레이저에서 레이저 전이의 마지막 상태는 바닥상태보다 0.03 eV 높다. 외부 영향이 없다면 300K에서 원자가 레이저 전이의 마지막 상태에 있을 확률은 얼마인가? 최소한 얼마만큼의 원자가 들떠 있어야 이 온도에서 레이저 증폭이 일어나겠는가? 왜? 100K에서는 상황이 어떻게 변하는가? 같은 효과가 있으려면 3준위 레이저를 냉각해야 하는가?

9.3 이상기체에서 분자 에너지

7. 하나는 속도가 1.00 m/s이고 다른 하나는 3.00 m/s인 두 분자로 된 집단(assembly)의 $\bar{\nu}$ 와 ν_{rms} 를 구하여라.

8. 실온에서(20°C) 분자당 평균 에너지는 수소원자의 바다상태를 첫째 들뜬 상태로 올리는 데 필요한 에너지보다 훨씬 작음을 보여라.
9. 기체상태의 수소에서 온도가 몇 도이면 평균 분자 운동에너지가 수소원자의 결합에너지와 같은가?
10. 20°C , 대기압하에서 열평형상태에 있는 산소분자의 산소분자의 드브로이 파장은 그 분자의 직경 약 $4 \times 10^{-10} \text{ m}$ 보다 더 작음을 보여라.
11. 500K에서 원자 수소 기체가 방출하는 656.3 nm 의 스펙트럼선에서 도플러 효과에 의한 선폭을 구하여라.
- (12) 이상기체 분자의 있을 가장 확률이 높은 속도는 $\sqrt{2kT/m}$ 임을 증명하라.
13. 이상기체 분자에 대해 $1/v$ 의 평균값은 $\sqrt{2kT/m}$ 임을 증명하라(힌트: $\int_0^\infty ve^{-av^2} dv = 1/2a$).
14. 중성자빔이 매초 10^{12} 중성자/ m^2 의 비율로 핵 반응로에서 나온다. 이들 중성자가 $T=300\text{K}$ 에 해당하는 맥스웰-볼츠만 에너지 분포를 갖는다면, 그 빔 속의 중성자의 밀도를 구하라.

9.4 양자통계학

- (15) 같은 온도에서 고전적 기체, 보오존 기체, 또는 페르미온 기체 중 어느 것의 압력이 가장 큰가? 또, 어느 것이 압력이 가장 작은가? 왜?
16. 0K의 페르미온계에서 페르미 에너지의 의미는 무엇인가? $T > 0\text{K}$ 에서는?

9.5 레일리-진스 공식

17. 한 모서리의 길이가 1 m 인 입방체 공동 내에서 생길 수 있는 9.5 에서 10.5 mm 사이의 파장을 갖는 독립된 정상파의 수는 얼마인가? 99.5 에서 100.5 mm 의 파장을 가진 정상파의 수는(힌트: 먼저 $g(\lambda)d\lambda = 8\pi L^3 d\lambda / \lambda^4$)?

9.6 플랑크 복사 법칙

18. 붉은 별과 흰 별이 같은 비율로 에너지를 발산한다면 그들은 크기가 같을 수 있는가? 만일 그렇지 않다면 어느 쪽이 더 큰가?
19. 온도 기록계는 인체 피부의 각 부분이 적외선을 내는 비율을 측정한다. 피부 온도의 작은 차이로

복사율에 큰 차이가 생긴다는 것을 증명하기 위해, 34°C 와 35°C 의 피부에서 나오는 총 복사의 차이를 퍼센트로 구하라.

20. 태양의 흑점은 그곳의 온도가 일반적으로 5000K 임에도 태양 표면의 나머지 부분이 약 5800K 로 더 뜨거우므로 쉽게 보인다. 방사율(emissivity)이 같고 온도가 각각 5000K 와 5800K 인 표면의 복사율을 비교하라.
21. 태양 표면의 온도가 지금보다 10% 만큼 낮아지면 태양 에너지는 어떤 복사율로 지구에 도달하는가?
- (22) 태양은 질량이 $2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$, 반경이 $7.0 \times 10^8 \text{ m}$, 그리고 표면 온도가 $5.8 \times 10^3 \text{ K}$ 이다. 태양이 복사에 의해 그 질량의 1% 를 잃기까지 몇 년이 걸리겠는가?
- (23) 어떤 물체가 400°C 에 있다. 그 물체는 몇 도에서 에너지를 두 배의 비율로 내는가?
24. 방사율이 0.3 이고 반경이 5cm 인 구리 구가 화로에서 400°C 로 가열되었다. 그것은 어떤 복사율로 복사하는가?
25. 내부 온도가 700°C 인 화로의 벽면에 면적 10 cm^2 인 구멍이 있다. 이 구멍으로부터 나오는 복사율을 구하라.
26. 500°C 의 물체는 겨우 알아볼 만큼 빛을 내고 750°C 가 되면 선홍색으로 보인다. 어떤 흑체복사가 온도 500°C 에서 1.00 kW 라면 온도가 750°C 일 때의 복사율은 얼마인가?
27. 온도 500°C 에서 1.00 kW 를 복사하는 흑체의 표면 적을 구하라. 그 흑체가 구라면 반경은 얼마인가?
28. 컴퓨터에 쓰이는 마이크로프로세서는 1 cm^2 의 표면 적에 30 W 의 비율로 열을 낸다. 흑체가 그만큼 복사한다면 온도는 몇 도인가(그것이 내는 열에 의해 피해받지 않도록 마이크로프로세서를 식히고 있다)?
29. 태양을 6000K 의 흑체로 생각하고, 총 복사에 대해 파장이 570 에서 590 nm 인 노란빛의 비율을 구하라.
30. 온도가 500°C 인 흑체로부터 나오는 복사 스펙트럼에서 피크 파장을 구하라. 이 파장은 전자기파 스펙트럼에서 어느 부분에 속하는가?
- (31) 시리우스(Sirius) 항성의 스펙트럼 중 가장 밝은 부분은 파장이 약 290 nm 인 곳에 있다. 시리우스의 표면 온도는 얼마인가?
32. 공동으로부터 나오는 복사 스펙트럼에서 피크 파장이 $3.00 \mu\text{m}$ 다. 공동 내의 총 에너지 밀도를 구

하라.

33. 표면 온도가 사람 피부와 비슷한 34°C인 물체로부터 나오는 복사에서 가장 강한 복사의 파장은 얼마인가? 이것은 스펙트럼의 어느 부분인가?
34. (a) 예제 9.6에서 언급한 2.7K 복사가 있는 우주에서 에너지 밀도를 구하라. (b) 광자 전부가 파장 1.1 mm이며 그 파장에서 에너지 밀도가 최대라고 가정하고, 위의 2.7K 복사의 입방미터당 광자의 수를 어림해서 구하라.
35. 1000K에서 열평형에 있는 체적 1.00 cm³인 복사의 정적 비열을 구하라.

9.9 전자 에너지 분포

36. 금속 내의 전자가 페르미 통계를 따른다는 사실과 광전효과가 실제로 온도에 무관하다는 사실 사이의 관계는 무엇인가?
37. $T=0$ 에서 자유전자 기체의 중간 에너지(median energy)가 $\varepsilon_F/2^{2/3}=0.630 \varepsilon_F$ 와 같음을 보여라.
38. 구리의 페르미 에너지는 7.04 eV다. 실온($kT=0.025$ eV)에서 구리의 자유전자의 어림한 평균 에너지와 맥스웰-볼츠만을 따른다고 하고 그 전자들의 평균 에너지를 비교하라.
39. 은의 페르미 에너지는 5.51 eV다. (a) 0K인 은에서 자유전자의 평균 에너지는 얼마인가? (b) 이상기체의 평균 분자 에너지가 이 값을 갖는데 필요한 온도는 몇 도인가? (c) 이 에너지를 갖는 전자의 속도는 얼마인가?
40. 구리의 페르미 에너지는 7.04 eV다. (a) 근사적으로 구리 전자의 몇 % 정도가 실온에서 들뜬 상태에 있겠는가? (b) 구리의 녹는점인 1,083°C에서는?
- (41) 식 (9.29)를 써서, $T=0$ 인 페르미온으로 이루어진 계에서 $\varepsilon < \varepsilon_F$ 인 모든 상태는 채워져 있고 $\varepsilon > \varepsilon_F$ 인 모든 상태는 비어 있음을 보여라.
- (42) 온도 T 인 전자 기체의 페르미 에너지는 ε_F 이다. (a) 어떤 에너지 ε 에서 그 에너지 상태가 채워질 확률이 5%일 것인가? (b) 어떤 에너지에서 그 에너지 상태가 채워질 확률이 95%일 것인가? 답을 ε_F 와 kT 를 써서 나타내라.
- (43) 어떤 온도에서 에너지 $\varepsilon_F + \Delta\varepsilon$ 인 상태의 평균 점유율이 f_1 이면, 에너지 $\varepsilon_F - \Delta\varepsilon$ 인 상태의 평균 점유율이 $f = 1 - f_1$ 임을 보여라(이것이 그림 9.10에서 ε_F 주위로 곡선이 대칭인 이유다).

44. 알루미늄의 밀도는 2.70 g/cm³이고 원자량은 26.97 u이다. 알루미늄의 전자구조는 표 7.4에 나와 있고 ($3s$ 와 $3p$ 전자의 에너지 차는 아주 작다), 알루미늄에서 전자의 유효질량은 $0.97 m_e$ 이다. 알루미늄의 페르미 에너지를 구하라(유효질량은 10.8절의 끝에서 논의되고 있다).
45. 아연(Zn)의 밀도는 7.13 g/cm³이고 원자량은 65.4 u이다. 아연의 전자구조는 표 7.4에 나와 있고, 아연에서 전자의 유효질량은 $0.85 m_e$ 이다. 아연의 페르미 에너지를 구하라.
46. 식 (9.48)에서 얻어진 자유전자 밀도와 단위체적당 납 원자의 수를 비교하여, 각각의 납 원자가 고체 납속의 자유전자 기체에 기여하는 전자의 수를 구하라. 납의 밀도는 1.1×10^4 kg/m³이고, 납의 페르미 에너지는 9.4 eV다.
- (47) 0K이고 1.00g인 구리 시료에서 $\varepsilon = \varepsilon_F/2$ 일 때 전자 상태의 수를 eV로 구하라. 전자의 에너지 분포가 금속 내에서 연속적이라고 생각해도 무방한가?
48. 구리의 비열은 20°C에서 0.0920 kcal/kg · °C다. (a) 이 값을 J/kmol · K로 표시하라. (b) 구리 원자당 하나의 자유전자가 있다고 가정하면 비열의 몇 %가 전자 기체에 기인하는가?
49. 보즈-아인슈타인과 페르미-디락 분포함수는 $e^\alpha e^{-\varepsilon/kT}$ $\gg 1$ 이면 맥스웰-볼츠만 함수로 귀결된다. kT 부근의 에너지에 대해 $e^\alpha \gg 1$ 이면 이 근사는 유효하다. 헬륨 원자는 스핀 0이고, 그래서 보즈-아인슈타인 통계를 따른다. STP(20°C와 1기압, 1 kmol의 기체는 22.4 m³이다)에 있는 He에 대해 $A \ll 1$ 임을 보임으로서 $f(\varepsilon) = 1/e^\alpha e^{-\varepsilon/kT} \gg 1 \approx A e^{-\varepsilon/kT}$ 가 타당함을 증명하라. 식 (9.47)의 $g(\varepsilon)d\varepsilon$ 를 사용하여 결수 8 대신 4를 써라. 이것은 He 원자의 전자가 스핀 0이기 때문이다. 그리고, 규격화 조건 $\int_0^\infty n(\varepsilon)d\varepsilon = N$ 으로부터 근사적으로 A 를 구하라. 여기서 N 은 시료 속에 있는 전체 원자수다(1 kmol의 He에는 아보가드로 수 N_0 만큼의 원자가 있다. He의 원자량은 4.00 u이고, $\int_0^\infty \sqrt{\varepsilon} e^{-\alpha\varepsilon} d\varepsilon = \sqrt{\pi/\alpha}/2\alpha$ 이다).
50. 헬륨은 4.2K 이하의 온도와 대기압하에서 밀도 145 kg/m³인 액체이다. 문제 49의 방법을 써서 액체 헬륨에 대해 $A > 1$ 이고, 따라서 헬륨은 맥스웰-볼츠만 통계로 만족스럽게 기술될 수 없음을 보여라.
51. 금속의 자유전자에 대한 페르미-디락 분포함수는 kT 부근에 있는 에너지에 대해 STP(문제 49 참조)에서 맥스웰-볼츠만 함수로 근사적으로도 귀결될

수 없다. 이것을 문제 49의 방법을 써서 증명함으로서 $f(\epsilon) \approx Ae^{-\epsilon/kT}$ 이면 구리에서 $A > 1$ 임을 보여라. 9.8절에서 계산했듯이, 구리의 $N/V = 8.48 \times 10^{28} \text{ 전자/m}^3$ 이다. 여기서는 식 (9.47)을 바꾸지 않고 사용해야 한다.

9.10 죽어 가는 별들

52. 태양의 질량은 $2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$ 이고 반경은 $7.0 \times 10^8 \text{ m}$ 이다. 태양은 온도가 10^7 K 인 완전히 이온화된 수소로 이루어져 있다고 가정한다. (a) 태양의 광자 기체(photon gas)와 전자 기체의 폐르미 에너지를 각각 구하라. (b) 이 에너지를 kT 와 비교하여, 각각의 기체가 축퇴되어 있는지 ($kT \ll \epsilon_F$, 그래서 ϵ_F 위의 에너지를 갖는 입자는 거의 없다), 혹은 축퇴되어 있지 않은지 ($kT \gg \epsilon_F$, 그래서 ϵ_F 아래의 에너지를 갖는 입자는 거의 없고 기체는 고전적으로 행동한다) 보라.
53. 질량이 태양 질량의 절반이고 반경은 태양 반경의

0.01인 백색왜성을 생각하자. 그 별은 완전히 이온화된 탄소원자(원자량 12 u)로 되어 있고, 그래서 핵 하나당 6개의 전자가 있으며 내부 온도는 10^7 K 이라고 가정하라. (a) 탄소 핵으로 된 기체와 전자 기체의 폐르미 에너지를 각각 구하라. (b) 이 에너지를 kT 와 비교하여, 각 기체가 문제 52처럼 축퇴되어 있는지, 아니면 축퇴되어 있지 않은지를 보라.

54. 질량 M 이고 반경 R 인 구체의 중력 위치에너지는 $E_g = -\frac{3}{5} GM^2/R$ 이다. 폐르미 에너지가 ϵ_F 인 N 개의 전자를 갖고 있는 백색왜성을 생각하자. $kT \ll \epsilon_F$ 이므로 식 (9.51)로부터 평균 전자 에너지는 약 $-\frac{3}{5} \epsilon_F$ 이고 전체 전자 에너지는 $E_e = -\frac{3}{5} N \epsilon_F$ 이다. 핵의 에너지는 E_g 와 비교해서 무시될 수 있다. 그러므로 별의 전체 에너지는 $E = E_g + E_e$ 이다. (a) $dE/dR = 0$ 으로 놓고 R 에 대해 풀어서 별의 평형상태 반경을 구하라. (b) 문제 53에서처럼, 질량이 태양의 절반이고 완전히 이온화된 탄소원자로 되어 있는 별에 대해 R 을 계산하라.