연 습 문 제

5.1 양자역학

1. 그림 5.14의 파동함수들 중에서 주어진 구간 내에서 물리적 의미가 없는 것은 어느 것인가? 그 이유는 무엇인가?

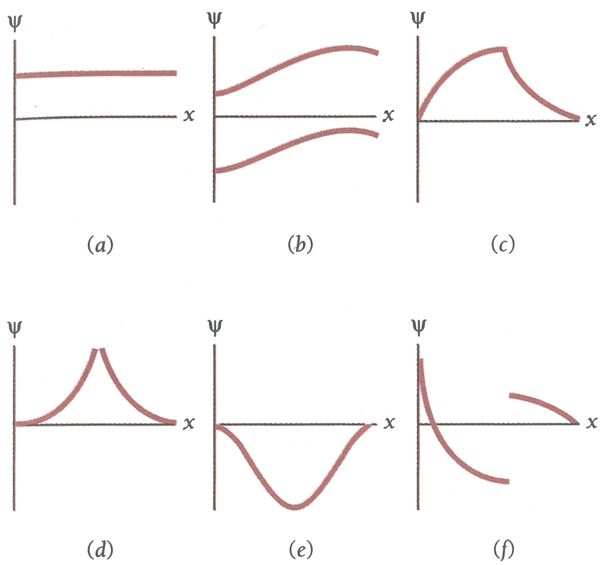

그림 5. 14

2. 그림 5.15의 파동함수들 중에서 주어진 구간 내에서 물리적 의미를 가질 수 없는 것은 어느 것인가? 그 이유는 무엇인가?

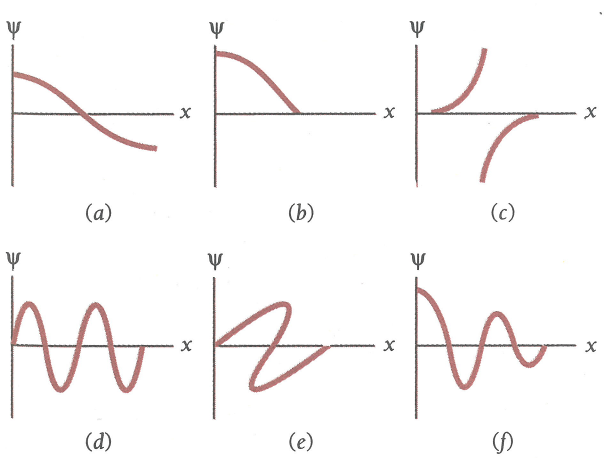

그림 5. 15

3. 다음 파동함수들 가운데 모든 x값에 대해서 슈뢰딩거 방정식의 해가 될 수 없는 것은 어느 것인가? 그 이유는 무엇인가? (*a*) $\psi = A\cos x$, (*b*) $\psi = A\sec x$, (*c*) $\psi = A\tan x$, (*d*) $\psi = Ae^{x^2}$, (*e*) $\psi = Ae^{-x^2}$

4. 파동함수 $\psi = Axe^{-x^2/2}$에 대해 규격화 상수를 구하라.

5. 어떤 입자의 파동함수가 $-\pi/2 < x < \pi/2$에서 $\psi = A\cos^2 x$다. (*a*) A를 구하라. (*b*) $x=0$과 $x=\pi/4$ 사이에서 발견될 확률을 구하라.

5.2 파동함수

6. 3.3절에 보였던 공식 $y = A\cos\omega(t - x/\nu)$는 당겨진 줄에서 $+x$ 방향으로 움직이는 파동을 기술하고 있다. 이 공식이 식 (5.3)의 해임을 보여라.

7. 5.1절에서 언급한 바와 같이, 계산의 결과가 물리적 의미를 가지려면 파동함수와 그 편미분이 유한하고, 연속이며 1가여야 함과 동시에 규격화될 수 있어야 한다고 했다. 식 (5.9)에서는 자유롭게(가해지는 힘이 없이) $+x$ 방향으로 움직이는 입자의 파동함수가

$$\Psi = Ae^{-(i/\hbar)(Et - px)}$$

로 주어졌다. 여기서 E는 입자의 총 에너지이며 p는 운동량이다. 이 파동함수는 위에서 말한 요구조건을 모두 충족시키는가? 만약 그렇지 않다면 이러한 파동함수의 선형중첩은 요구조건을 만족시킬 수 있겠는가? 그러한 파동함수의 중첩의 중요성을 설명하라.

5.3 슈뢰딩거 방정식: 시간의존형

8. $\Psi_1(x, t)$와 $\Psi_2(x, t)$가 둘 다 식 (5.14)의 해라고 하면 $\Psi = a_1\Psi_1(x, t) + a_2\Psi_2(x, t)$도 역시 그 해임을 보임으로써 슈뢰딩거 방정식이 선형임을 보여라.

5.5 슈뢰딩거 방정식: 정상상태형

9. $y = \psi$라 하고, 드브로이의 관계식 $\lambda = h/mv(v \ll c$이

고 m은 질량)을 이용해서 $\partial^2\psi/\partial x^2$을 구해서 식 (3.5)로부터 정상상태 슈뢰딩거 방정식을 구하라.

5.6 상자 속의 입자

10. 대응원리에 의하면 양자론은 큰 양자수에 대해서 고전물리와 같은 결과를 주어야 한다. $n\to\infty$일 때, 5.6절의 구속된 입자가 x와 $x+\Delta x$ 사이에서 발견될 확률은 고전역학적 기대값에서와 같이 $\Delta x/L$이고 x에 무관함을 보여라.
11. 그림 5.16에 퍼텐셜 우물 속에 있는 입자가 가질 수 있는 파동함수를 그려 놓았다. ψ의 진폭과 파장이 변하는 이유를 설명하라.

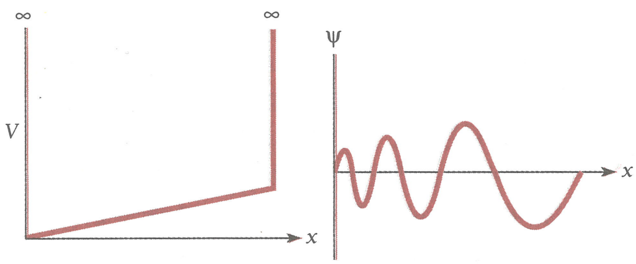

그림 5. 16

12. 5.6절에서는 상자를 $x=0$에서 $x=L$로 설정했다. 이제 그 상자가 $x_0\neq 0$라고 할 때 $x=x_0$에서 $x=x_0+L$로 그 영역이 바뀐다고 하자. 이 상자 안의 입자에 대한 파동함수의 표현이 원래의 파동함수와 달라질 것인가? 에너지 준위에는 변동이 있는가?
13. 어떤 계의 고유함수들이 갖는 중요한 성질 중의 하나는 서로 직교(orthogonal)하는 것이며,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n \psi_m \, dV = 0 \qquad n \neq m$$

으로 표현된다. 식 (5.33)으로 주어지는 1차원 상자 속의 입자에 대한 고유함수를 이용하여 이 관계식을 증명하라.

14. $-L$부터 L까지 걸쳐 있는 딱딱한 벽으로 된 상자가 $-x$와 x에 위치한 벽에 의해 세 부분으로 나뉘어져 있다. $x<L$이다. 각 부분에는 바닥상태의 입자가 들어 있다. (*a*) 그 계의 총 에너지를 x의 함수로 표현하라. (*b*) $E(x)$ 대 x의 그래프를 작성하라. (*c*) 어떤 x에서 $E(x)$가 최소치를 보이는가?
15. 본문에서 설명한 바와 같이 폭이 L인 상자 속에 구속된 입자의 기대값 $\langle x\rangle$은 $L/2$인데, 이것은 입자의 평균위치가 상자의 중심임을 뜻한다. 기대값 $\langle x^2\rangle$을 구하라.
16. 문제 8에서 언급된 바와 같이 같은 계에 대한 두 개의 파동함수의 일차결합도 그 계에 대한 파동함수가 된다. 폭이 L인 상자 속에 있는 입자의 $n=1$인 상태와 $n=2$인 상태에 대한 파동함수의 결합

$$\psi = B\left(\sin\frac{\pi x}{L} + \sin\frac{2\pi x}{L}\right)$$

에 대해서 규격화 상수 B를 구하라.

17. 폭이 L인 상자 속의 입자가 n번째 상태에 있을 때, $x=0$와 $x=L/n$ 사이에서 발견될 확률을 구하라.
18. 3.7절에서는 N회의 측정에서 어떤 양 x의 표준편차 σ는

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_0)^2}$$

으로 정의된다. (*a*) 기대값을 사용하여, 이 공식이

$$\sigma = \sqrt{\langle (x-\langle x\rangle)^2\rangle} = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

으로 표현될 수 있음을 보여라. (*b*) 상자 속의 입자의 위치에 대한 불확정성이 표준편차로 간주된다면, $n=1$에 대한 기대값 $\langle x\rangle = L/2$의 불확정도를 구하라. (*c*) n이 증가함에 따라 Δx의 극한치는 무엇인가?

19. 모서리의 길이가 L이고, 무한히 딱딱한 벽을 가진

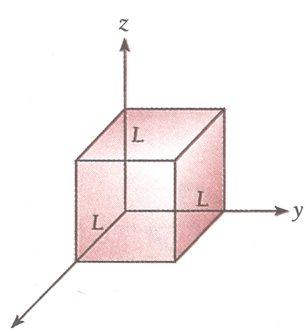

그림 5. 17 정육면체 상자.

상자(그림 5.17) 안에 입자가 들어 있다. 그 파동함수는 다음과 같다.

$$\psi = A \sin \frac{n_x \pi x}{L} \sin \frac{n_y \pi y}{L} \sin \frac{n_z \pi z}{L}$$

$$n_x = 1, 2, 3, \ldots$$
$$n_y = 1, 2, 3, \ldots$$
$$n_z = 1, 2, 3, \ldots$$

규격화 상수 A를 구하라.

20. 문제 19의 상자 속의 입자가 바닥상태 $n_x = n_y = n_z = 1$에 있다. (*a*) 입자가 $0 \le x \le L/4$, $0 \le y \le L/4$, $0 \le z \le L/4$로 국한된 체적 안에서 발견될 확률을 구하라. (*b*) $L/4$ 대신에 $L/2$를 사용해도 그 결과가 같을 것인가?
21. (*a*) 문제 19의 상자 속의 입자의 파동함수 ψ를 슈뢰딩거 방정식에 대입하여 가능한 에너지를 구하라(힌트: 상자 속에서는 $U=0$이다). (*b*) 1차원 상자와 3차원 상자 속의 입자의 바닥상태 에너지를 비교하라.

5.8 터널효과

22. 같은 에너지 E를 갖는 전자와 양성자가 E보다 큰, 높이 U의 퍼텐셜 장벽으로 접근하고 있다. 두 입자는 같은 투과확률을 갖는가? 그렇지 않다면 어느 입자의 확률이 더 높은가?
23. 높이 6.00 eV, 폭 0.200 nm의 장벽으로 전자 선속이 입사된다. 그 1%가 장벽을 투과하기 위한 전자 에너지를 구하라.
24. 높이 3.00 eV, 폭 0.100 nm의 장벽으로 에너지 0.400 eV의 전자가 입사된다. 전자가 그 장벽을 투과할 확률을 근사적으로 구하라.
25. 운동에너지가 E인 입자선속이 $x=0$에서 높이 $U(E>U)$의 퍼텐셜 계단으로 입사된다(그림 5.18). (*a*) 해 $De^{-ik'x}$(5.8절의 표기)는 물리적 의미가 없으므로 D를 0으로 처리하는 이유를 설명하라. (*b*) 투과확률은 $T = CC^*/AA^* = 4k_1^2/(k_1 + k')^2$임을 보여라. (*c*) 속력이 2×10^6 m/s인 1mA의 전자선속이 급격하게 변하는 경계면을 통과하면서 속력이 1×10^6 m/s로 감소했다. 투과 및 반사전류를 구하라.

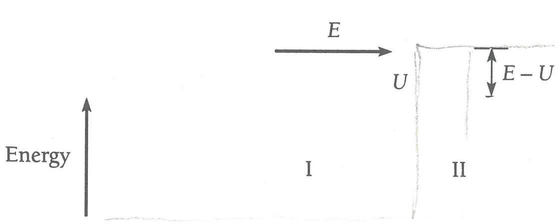

그림 5. 18

5.9 조화진동자

26. 조화진동자에 대해서 인접한 에너지 준위 간의 비 $\Delta E_n/E_n$을 구하고 $n \to \infty$일 때 이 비가 어떻게 변화하는가를 조사하여 조화진동자의 에너지 준위의 간격이 대응원리와 일치함을 보여라.
27. 조화진동자의 영점에너지의 존재에 대해서 불확정성은 어떤 관계를 가지고 있다고 생각하는가?
28. 조화진동자에서, 입자의 위치는 $-A$와 $+A$ 사이에서, 운동량은 $-p_0$와 $+p_0$ 사이에서 변화한다. 이러한 진동자의 x와 p에 대한 표준편차는 $\Delta x = A/\sqrt{2}$, $\Delta p = p_0/\sqrt{2}$다. 이것을 이용해서 조화진동자의 최소 에너지는 $(1/2)h\nu$ 임을 보여라.
29. 고전역학적인 운동진폭이 A인 조화진동자의 $n=0$인 상태는 $x=A$에서 $y=1$임을 증명하라. 여기서 y는 식 (5.76)으로 정의된 양이다.
30. $n=0$인 상태에 있는 조화진동자의 $x=\pm A$와 $x=0$의 확률밀도 $|\psi_0|^2 dx$를 구하라(그림 5.13).
31. 조화진동자의 첫 두 상태에 대하여 $\langle x \rangle$와 $\langle x^2 \rangle$의 기대값을 구하라.
32. 조화진동자의 퍼텐셜 에너지는 $U = (1/2)kx^2$으로 주어진다. 진동자가 $n=0$인 상태일 때 U의 기대값 $\langle U \rangle$는 $E_0/2$임을 증명하라(실제로 이것은 조화진동자의 모든 상태에 대해서 성립한다). 이 진동의 운동에너지에 대한 기대값은 얼마인가? 고전역학적인 값 $\overline{U}$와 $\overline{\mathrm{KE}}$를 이 결과와 비교하면 어떻게 되는가?
33. 1.00 g의 추가 매달린 진자가 질량이 없는 250 mm의 줄에 매달려 있다. 진자의 주기는 1.00 s이다. (*a*) 영점에너지는 얼마인가? (*b*) 평형점으로부터 최대 1.00 mm 정도 올라갈 만큼 작은 진폭으로 진자가 흔들리고 있다. 그에 상응하는 양자수는 얼마인가?
34. 조화진동자의 파동함수 ψ_1은 슈뢰딩거 방정식의 해임을 보여라.

35. 조화진동자의 파동함수 ψ_2는 슈뢰딩거 방정식의 해임을 보여라.
36. 조화진동자의 파동함수 ψ_3은 슈뢰딩거 방정식의 해임을 보여라.

부록 : 연산자, 고유함수, 고유값

37. 기대값 $\langle px \rangle$와 $\langle xp \rangle$는 다음과 같은 관계에 있음을 보여라.

$$\langle px \rangle - \langle xp \rangle = \frac{\hbar}{i}$$

이 결과는 p와 x가 서로 교환되지(commute) 않음을 뜻하며 불확정성 원리와 밀접한 연관이 있다.
38. $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$일 때 연산자 d^2/dx^2의 고유함수는 $\sin nx$다. 그에 대한 고유값을 구하라.