

어떤 물체든지 자신의 전체 질량이 식 (2.30)으로 계산된 반경 내에만 집중되어 있으면, 그 물체는 블랙 홀이 된다. 블랙 홀의 중심으로부터 거리가 슈바르츠실트 반경에 해당되는 위치에서는, 그 블랙 홀로부터의 탈출 속력은 광속 c 와 같다. 따라서 어떤 것도 블랙 홀에서 탈출할 수 없다. 예를 들어, 질량이 태양과 같은 별의 경우 그 별의 R_s 는 3 km 인데, 이는 현재 태양의 반경의 $1/(2.32 \times 10^5)$ 이다. 블랙 홀에 접근하는 모든 물체는 빨려 들어가서 다시는 밖으로 나오지 못할 것이다.

블랙 홀은 보이지 않으므로, 어떻게 관측할 수 있겠는가? 이중성계(二重星系)의 한 구성원인 블랙 홀은(이중성은 매우 흔하다) 상대 별에 대해 어떤 중력 효과를 나타냄으로써 자신의 존재를 외부에 알릴 수 있다. 블랙 홀과 그의 상대편 별은 서로 공전한다. 더욱이 블랙 홀의 강력한 중력이 상대별로부터 물질을 끌어내어 압축시키면 높은 온도가 되어 강력한 X선을 방출하게 된다. 이러한 근거에서, 오늘날 천문학자들이 블랙 홀이라고 믿고 있는 여러 개의 보이지 않는 물체들 중 하나가 시그너스 X-1으로 알려져 있다. 그의 질량은 아마도 태양의 8배일 것이고, 반경은 10 km 일 것이다. X선을 방출하는 블랙 홀 주위의 공간영역은 수백 km 에 걸쳐 있다.

질량이 매우 큰 별들만이 블랙 홀이 되어 일생을 마친다. 질량이 작은 별들은 백색왜성과 중성자별로 진화한다. 중성자별은 그 이름처럼 주로 중성자들로 구성되어 있다. 그러나 시간이 지나면서, 백색왜성과 중성자별의 강력한 중력장은 점점 더 많은 양의 우주먼지와 기체를 흡수한다. 그래서 그들의 질량이 충분히 커지면 그들 역시 블랙 홀로 될 것이다. 이 우주가 오랫동안 지속되면, 우주 내의 모든 것은 블랙 홀 형태로만 존재하게 될 것이다.

연습문제

2.2 혹체복사

- 만일 플랑크 상수가 지금의 값보다 더 작아진다면, 양자현상들은 지금보다 더 뚜렷하게 나타나겠는가, 아니면 더 약하게 나타나겠는가?
- 플랑크 복사공식을 파장 λ 로 기술하라.

2.3 광전효과

- 광전에너지 최대값 KE_{\max} 이 입사광자의 진동수 ν 에 비례한다고 주장한다면, 이 주장은 타당한가? 만약 그렇지 않다면, KE_{\max} 와 ν 사이의 관계는 어떠한가?

- 입자의 성질들과 파동의 성질들을 비교하라. 빛의 파동성이 그의 입자성보다 더 일찍 발견된 이유는 무엇이라 생각하는가?
- 파장이 700 nm 인 광자의 에너지는 얼마인가?
- 에너지가 100 MeV 인 광자의 파장과 진동수를 구하라.
- 1 kW 라디오 송신기가 880 kHz 의 진동수로 작동 중이다. 이 송신기는 초당 몇 개의 광자들을 방출하는가?
- 최적조건에서, 인간의 눈은 전자기에너지 10^{-18} J 을 감지할 수 있다. 이 에너지는 600 nm 광자들 몇 개에 해당하는가?
- 태양에서 방출되는 빛은 평균 거리 $1.5 \times 10^{11}\text{ m}$ 떨

- 어진 지구에 도달하여, 빛의 진행방향에 직교인 평면에 $1.4 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ 의 비율로 에너지를 전달한다. 이 빛의 진동수는 $5.0 \times 10^{14} \text{ Hz}$ 이라고 가정하자. (a) 태양을 향하고 있는 지구표면에 단위면적당, 초당 몇 개의 광자가 도달하는가? (b) 태양의 출력은 얼마이고, 초당 몇 개의 광자들을 방출하는가? (c) 지구 근방에서 단위체적(1m^3) 내에 몇 개의 광자들이 존재하는가?
10. 자동차 사고로 떨어져 나온 망막을, 파장 632 nm , 출력 0.50 W 인 레이저에서 방출되는 20 ms 펄스들을 사용해서 제자리에 다시 붙였다. 각 펄스당 몇 개의 광자들이 포함되어 있는가?
 - (11) 텡스텐에서 광전자를 방출시키기 위한 최대 파장은 230 nm 다. 방출되는 전자의 에너지가 최대 1.5 eV 가 되기 위해서는, 입사광의 파장은 얼마여야 하는가?
 12. 구리에서 광전자를 방출시키기 위한 최소 진동수는 $1.1 \times 10^{15} \text{ Hz}$ 다. 진동수가 $1.5 \times 10^{15} \text{ Hz}$ 인 빛을 구리표면에 쪘었을 때 방출되는 광전자의 최대 에너지는 몇 eV 인가?
 13. 나트륨에서 광전자를 방출시키기 위한 입사광의 최대 파장은 얼마인가? 나트륨 표면에 파장이 200 nm 인 빛을 쪘었을 때 방출되는 광전자의 최대 에너지는 몇 eV 인가?
 14. 은으로 만든 구(silver ball)를 진공 속에 매달아 놓고 파장이 200 nm 인 자외선을 쪘었다. 이 구가 얻게 되는 전위는 얼마인가?
 - (15) 파장 400 nm , 출력 1.5 mW 의 빛을 광전지(photoelectric cell)에 쪘었다. 입사된 광자의 0.1% 만이 광전자를 방출하는 데 사용되었다면 그 전지 내에서 전류를 구하라.
 - (16) 그림 2.9와 같은 장치에서 금속 표면에 파장 400 nm 인 빛을 쪘었다. 이 금속의 일함수는 2.50 eV 다. (a) 광전자 전류를 0 으로 만드는 억제전압은 얼마인가? (b) 광전자가 가질 수 있는 최대 속력은 얼마인가?
 - (17) 어떤 금속 표면에 진동수가 $8.5 \times 10^{14} \text{ Hz}$ 인 빛을 쪘더니 최대 에너지가 0.52 eV 인 광전자가 방출되었다. 이 금속 표면에 진동수가 $12.0 \times 10^{14} \text{ Hz}$ 인 빛을 쪘더니 최대 에너지가 1.97 eV 인 전자가 방출되었다. 이 관측결과를 이용하여 이 금속 표면의 플랑크 상수와 일함수를 구하라.
 18. 텡스텐 표면의 일함수는 5.4 eV 다. 그 표면에 파장 175 nm 인 빛을 쪘더니 최대 에너지가 1.7 eV 인 광전자가 방출되었다. 이 관측결과를 이용하여 이 금속 표면의 플랑크 상수를 구하라.
 19. 하나의 광자가 하나의 자유전자에게 그의 에너지와 운동량을 100% 전달하는 것은 불가능함을 설명하라. 이것이 바로 광전효과는, 광자가 구속된 전자들과 충돌했을 경우에만 발생되는 이유다.
- ## 2.5 X선
- (20) 최소 파장이 30 pm 인 X선을 방출시키기 위해서는, X선관에 얼마의 전압을 공급해야 하는가?
 21. TV 브라운관에서 전자는 약 10 kV 의 전위차로 가속된다. 이 전자들이 브라운관면에 충돌할 때 발생되는 전자기파의 최대 진동수는 얼마인가? 이 전자기파는 전자기파 스펙트럼 분류상 어느 영역에 속하는가?
- ## 2.6 X선 회절
- (22) KCl 결정에서 0.30 nm X선에 대한 브래그 산란의 최소각은 28.4° 다. 여기에 대응되는 브래그 평면들 사이의 간격은 얼마인가?
 23. 방해석(CaCO_3)의 이웃한 브래그 평면들 사이의 간격이 0.3 nm 다. 0.30 nm X선에 대한 브래그 산란의 최소각은 얼마인가?
 24. 그림 2.19에 그려 놓은 소금(NaCl) 결정에서 원자들 사이의 간격을 구하라. 소금결정의 밀도는 $2.16 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 이고 Na와 Cl 원자의 평균 질량은 각각 $3.82 \times 10^{-26} \text{ kg}$, $5.89 \times 10^{-26} \text{ kg}$ 이다.
- ## 2.7 콤프턴 효과
- (25) 운동량이 $1.1 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ 인 X선 광자의 진동수는 얼마인가?
 26. 광자의 운동량이 에너지가 10 MeV 인 양성자의 운동량과 같다면, 이 광자의 에너지는 얼마인가?
 27. 2.7절에서, 결정에 의해 산란된 X선이 파장의 변화를 겪지 않는다고 가정했다. 나트륨 원자의 콤프턴 파장을 계산하고 그 결과를 파장이 0.1 nm 인 전형적인 X선과 비교해서 이 가정이 타당함을 보여라.
 - (28) 파장이 55.8 pm 인 단일파장의 X선이 46° 로 산란되었다. 산란된 X선의 파장을 구하라.
 29. X선이 표적에 의해 산란되고 있다. 45° 방향으로

산란된 X선은 파장이 2.2 pm 다. 산란되지 않고 직진한 X선의 파장은 얼마인가?

- 30) 진동수가 $1.5 \times 10^{19} \text{ Hz}$ 인 X선 광자가 전자와 충돌한 후 그 진동수가 $1.2 \times 10^{19} \text{ Hz}$ 로 되었다. 전자에 전달된 운동에너지는 얼마인가?
31. 초기 진동수가 $3 \times 10^{19} \text{ Hz}$ 인 X선 광자가 전자와 충돌하여 90° 로 산란되었다. 이 산란된 X선 광자의 진동수는 얼마인가?
32. 최대 에너지 50 keV 를 전자에 전달할 수 있는 X선 광자의 에너지를 구하라.
33. 입사에너지 100 keV 인 X선이 표적에 의해 산란된 후 90 keV 의 에너지를 가지고 산란되었다. 이 산란각은 얼마인가?
34. (a) 파장이 80 pm 인 X선이 표적에 의해 120° 로 산란될 때 파장의 변화를 구하라. (b) 광자의 입사방향과 반발전자의 진행방향 사이의 각을 구하라. (c) 반발전자의 에너지를 구하라.
- 35) 진동수 ν 인 광자가 정지중인 전자에 의해 산란되었다. 반발 전자의 최대 운동에너지는

$$KE_{\max} = (2h^2 \nu^2 / m_0 c^2) / (1 + 2h \nu / m_0 c^2)$$

임을 검증하라.

36. 입사 X선의 파장이 10.0 pm 인 콤프턴 효과 실험에서, 어떤 각도로 산란된 X선의 파장이 10.5 pm 다. 여기에 대응되는 반발 전자의 운동량(방향과 크기)을 구하라.
37. 전자의 정지에너지와 같은 크기의 에너지를 갖는 광자가 전자와 콤프턴 충돌을 했다. 만약, 이 전자가 광자의 입사방향과 40° 의 각도로 산란된다면, 산란된 광자의 에너지는 얼마인가?
38. 에너지가 E 인 광자가 정지질량이 E_0 인 입자에 의해 산란된다. 이 반발된 입자의 최대 운동에너지를 E 와 E_0 로 기술하라.

2.8 쌍생성

39. 양전자가 전자와 정면충돌하여 소멸되었다. 각 입자는 1 MeV 의 운동에너지를 갖고 있었다. 이때 생성된 광자의 파장을 구하라.
40. 운동에너지가 2.000 MeV 인 양전자가 정지중인 전자와 충돌하여 소멸되었다. 광자 두 개가 생성되었는데, 한 광자는 입사 양전자와 같은 방향으로, 다른 한 광자는 반대방향으로 운동한다. 이 광자들의 에너지를 구하라.

41. 광자의 초기 에너지값과는 상관없이, 광자는 60° 이상의 각도로는 콤프턴 산란될 수 없으나 전자-광자쌍은 생성시킬 수 있다고 한다. 이를 증명하라(힌트: 전자의 콤프턴 파장을 광자의 쌍생성에 필요한 최대 파장으로 기술한다).
42. (a) 광자가 질량 M 인 정지중의 핵 근방에서 전자-양전자쌍을 생성하기 위해서 필요한 광자의 최소 에너지값은 $2m_0c^2(1+m_0/M)$ 임을 검증하라. 여기서 m_0 는 전자의 정지질량이다. (b) 양성자 근방에서 쌍생성이 일어나기 위해 필요한 최소 에너지는 얼마인가?
43. (a) 복사선의 세기를 $1/2$ 로 감소시키는 데 필요한 흡수체의 두께 $x_{1/2}$ 은 $x_{1/2} = 0.693/\mu$ 이라는 것을 증명하라. (b) 복사선의 세기를 $1/10$ 로 감소시키는 데 필요한 흡수체의 두께를 구하라.
44. (a) $\mu x \ll 1$ 인 경우에, 흡수체의 두께 x 에 의해 흡수된 복사선의 세기는 $I_0 \mu x$ 임을 밝혀라. (b) $\mu x = 0.100$ 인 경우에 식 (2.25) 대신에 위 공식을 사용한 경우 페센트 오차를 구하라.
45. 납에서 1 MeV γ 선에 대한 선형흡수계수는 78 m^{-1} 이다. 이 γ 선의 세기를 $1/2$ 로 감소시키는 데 필요한 납의 두께는?
46. 해수면상 공기 중에서 50 keV X선에 대한 선형흡수계수는 $5.0 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ 이다. 이 X선이 공기 중에서 거리 0.5 m 를 통과한 뒤 그 세기는 얼마나 감소되었는가? 공기 중에서 거리 5.0 m 를 통과한 뒤는?
47. 2.0 MeV γ 선의 선형감쇠계수는 물에서 4.9 m^{-1} , 납에서 52 m^{-1} 이다. 이 γ 선에 대해 납 10 mm 가 감쇠시키는 세기만큼 물을 사용하여 감쇠시키려면 필요한 물의 두께는 얼마인가?
48. 80 keV X선에 대한 구리의 선형흡수계수는 $4.7 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$ 이다. 이 X선이 0.10 mm 의 구리 박막을 통과한 뒤의 상대적 세기는?
49. 문제 48번의 X선의 세기를 $1/2$ 로 감소시키는 데 필요한 구리의 두께는 얼마인가?
50. 파장 0.05 nm X선에 대한 선형감쇠계수는 납에서 $5.8 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$, 철에서 $1.1 \times 10^4 \text{ m}^{-1}$ 이다. 이 X선에 대해 납 10 mm 가 차폐해 주는 정도만큼 철로 차폐시키고자 할 때 철의 두께는?

2.9 광자와 중력

51. 태양의 질량은 $2 \times 10^{30} \text{ kg}$ 이고 그 반경은 $7 \times 10^8 \text{ m}$ 이다. 태양에서 방출되는 500 nm 파장의 빛이 중력에 의해서 적색이동하는 양을 근사적으로 구하라.
- (52) 질량은 태양과 같고, 반경은 지구 반경 $6.4 \times 10^6 \text{ m}$ 과 같은 백색왜성에서 방출되는 파장 500 nm의 빛이 중력에 의해서 적색이동되는 양을 근사적으로 구하라.
53. 원자핵은 들뜬 에너지 상태에서 바닥 에너지 상태로 변환될 때 광자를 방출하는데, 이 광자는 γ 선이다. 광자를 방출할 때 핵은 반대방향으로 되튀게 된다. (a) $^{57}_{27}\text{Co}$ 핵은 K포획에 의해서 $^{57}_{26}\text{Fe}$ 로 붕괴되고, $^{57}_{26}\text{Fe}$ 은 연이어 14.4 keV의 에너지를 뺏어버리면서 하나의 광자를 방출하고 자신은 바닥상태로 된다. $^{57}_{26}\text{Fe}$ 원자의 질량은 $9.5 \times 10^{-26} \text{ kg}$ 이다. 뺏어버린 14.4 keV의 에너지 중 대부분을 광자가 가져가지만, 일부는 광자가 방출되는 순간에 반발되는 원자($^{57}_{26}\text{Fe}$)의 에너지와 운동량으로 변환될 수도 있다. 이와 같이 반발되는 원자가 14.4 keV 에너지 중 일부를 나누어 갖게 될 경우, 광자의 에너지는 14.4 keV보다 얼마나 감소되겠는가? (b) 어떤 결정 내에서는 원자들이 강하게 결속되어 있기 때문에 γ 선

광자가 방출될 때 각각의 원자가 반발되기보다는 결정 전체가 반발된다. 이 현상을 퍼스바우어 효과(Mössbauer Effect)라 부른다. 만일 여기된 $^{57}_{26}\text{Fe}$ 핵이 1.0 g의 결정의 한 부분이라면 광자의 에너지는 얼마나 감소하겠는가? (c) (b)에서와 같이, 실질적으로는 반발이 없는 상태하에서, γ 선의 방출은 거의 하나의 에너지값만을 갖는, 즉 단색 광자의 광원을 만들 수 있다. 그런 광원이 2.9절의 실험에서 사용되었다. 14.4 keV의 γ 선 광자가 무중력 공간에 있을 때, 그의 진동수는 얼마인가? 이 광자가 지상 높이 20 m에 있을 때와 0 m에 있을 때의 진동수의 차이를 구하라.

54. 태양의 슈바르츠실트 반경을 구하라.
55. 질량 M 인 물체의 중심으로부터 거리 R 이 되는 위치에 있는 질량 m 인 물체의 중력 위치에너지(무한히 멀리 떨어진 위치에서의 $U=0$)는 $U = -GmM/R$ 이다. (a) 만일 질량 M 인 물체의 반경이 R 이면, 질량 m 인 물체가 M 으로부터 완전히 탈출하기 위해 필요한 최소한의 속도(탈출속도) v_e 를 구하라. (b) $v_e = c$ (c 는 광속)라 두고, M 의 슈바르츠실트 반경을 기술하는 공식을 구하라. 그리고 R 에 관해 정리하라(물론 여기서는 상대론적 계산이 정확한 것이지만, 고전적인 계산결과도 한번 알아보자는 것이다).